Herbert Sauber 22.1.2024

Testen von Hypothesen

Jemand berichtet, beim letzen Kasinobesuch großes Pech gehabt zu haben, weil der Spielpartner beim Würfelspiel sehr viele Sechsen gewürfelt habe.
Die Zuverlässigkeit eines Corona-Schnelltests wird bezweifelt, weil zu viele Infizierte unerkannt bleiben.
Andere behaupten, die PCR-Tests seien wertlos, weil sie zu häufig bei vollkommen Gesunden eine Infektion anzeigen.
Ob der Kasinobesucher nur Pech hatte, oder ob er einem Betrüger aufgesessen ist, oder ob Coronatests bei immer wiederkehrenden Fehlurteilen wertlos sind, soll im Folgenden mathematisch untersucht werden. Dabei wird die Situation zuerst vereinfacht und auf ihren mathematischen Kern reduziert. Die Ergebnisse der mathematischen Analyse werden abschließend auf die eingangs beschriebenen Beispiele angewendet und bewertet.

I. Einseitiger Test einer Hypothese

*Von einem Würfel wird vermutet, dass er öfters die Sechs liefert, als es bei einem Laplace-Würfel zu erwarten ist. Es soll ein **Test** entworfen werden, um die **Hypothese**, es handele sich um einen Laplace-Würfel, zu untersuchen.*

Dazu wird geplant, den Würfel n=100 mal zu werfen und dabei die Zufallsvariable X=Anzahl der aufgetretenen Sechsen zu betrachten.
Sei H_0: "Es handelt sich um einen Laplace-Würfel." $(p(\{6\}) = 1/6)$ die **Nullhypothese.**[1]
Sei H_1: "Die Sechs erscheint zu häufig." $(p(\{6\}) > 1/6)$ die **Gegenhypothese**.

Mit einer zunächst willkürlich festgelegten Zahl k, etwa k=25, wird die folgende **vorläufige Entscheidungsrege**l festgelegt:

$X \leq k \rightarrow H_0$ wird akzeptiert.

$X > k \rightarrow H_1$ wird akzeptiert.

Das so gebildete Urteil kann natürlich falsch sein:

Fehler 1. Art: Es handelt sich in Wirklichkeit um einen Laplace-Würfel, aber $X > k$, und H_1 wird also fälschlicherweise akzeptiert.

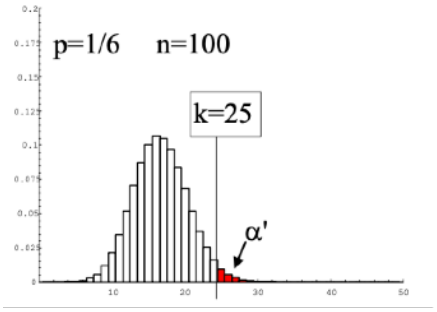
[1] Als Nullhypothese wähle man die Aussage, deren Wahrscheinlichkeit einen bekannten Wert hat.

Fehler 2. Art: Es handelt sich in Wirklichkeit um keinen Laplace-Würfel, aber $X \leq k$ und H_0 wird also fälschlicherweise akzeptiert.

Es ist klar, daß die Größe dieser Fehler durch die Wahl von k beeinflußt wird, deshalb ist es wichtig, diese Fehler zu berechnen, um sie durch eine geeignete Wahl von k klein zu halten.

Bezeichne α' den Fehler 1. Art, dann gilt:

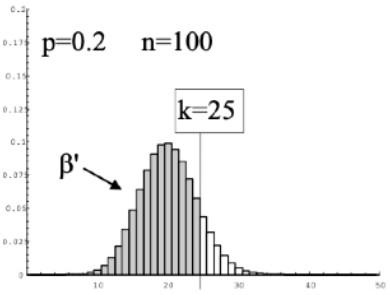
$$\begin{aligned}\alpha' &= P_{H_0}(X > k)\\ &= 1 - F_{\frac{1}{6}}^{100}(k)\\ &= 1 - 0.9881\\ &= 0.0119\\ &= 1.19\%\end{aligned}$$



Das heißt: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 1.19% wird ein Laplace-Würfel irrtümlicherweise für einen gefälschten Würfel gehalten. Diese Fehlerwahrscheinlichkeit ist also vertretbar klein. Positiv ausgedrückt: Der Würfel ist mit 98,91% Sicherheit gefälscht.

Den Fehler 2. Art zu berechnen, ist schwierig, weil man die Wahrscheinlichkeit p für eine Sechs nicht kennt. Nehmen wir an, der Würfel sei gefälscht und es gelte p({6}) = 0.2. Dann gilt:

$$\text{Fehler 2. Art} =: \beta' = P_{H_1}(X \leq k) = F_{0.2}^{100}(k) = 0.9125 = 91.25\%.$$



Das bedeutet, dass auch ein gefälschter Würfel mit der Wahrscheinlichkeit von 91.25% noch irrtümlicherweise für einen echten Laplace-Würfel gehalten wird. Wenn ein Urteil mit einem solch großen Fehler behaftet ist, ist es natürlich fast wertlos.

Es ist offensichtlich, dass der Fehler 1. Art klein wird, wenn k größer gewählt wird. Der Fehler 2.Art jedoch kann prinzipiell nicht durch k kontrolliert werden, da die Wahrscheinlichkeit für die Sechs bei einem gefälschten Würfel nicht bekannt ist.

Man muss deshalb die Entscheidungsregel abändern:

$X \leq k \rightarrow H_0$ wird nicht abgelehnt.

$X > k \rightarrow H_0$ wird abgelehnt (= H_1 wird akzeptiert.)

Nur wenn die Versuchsreihe mehr als k Sechsen ergeben hat, (Man sagt dann: "Der Test zeigt ein **signifikantes Ergebnis**.") kann man also eine praktisch brauchbare Schlussfolgerung aus dem Test ziehen: Es handelt sich mit einem möglichen Fehler von 1.19% um einen

gefälschten Würfel. Im anderen Fall ist keine Aussage möglich (Häufig findet man jedoch auch die irrige Meinung, der Test habe gezeigt, daß der Würfel nicht gefälscht sei.).

Bei der praktischen Planung eines Tests gibt man häufig eine obere Schranke a, etwa a=5% für den Fehler 1.Art vor, und bestimmt dann die kleinste Zahl k, für die der Fehler 1.Art höchstens gleich a ist:

$$\alpha \geq \alpha' = P_{H_0}(X > k) = 1 - F_{\frac{1}{6}}^{100}(k)$$

$$\Rightarrow \quad F_{\frac{1}{6}}^{100}(k) \geq 1 - \alpha' = 95\%$$

$$\Rightarrow \quad k_{min} = 23$$

Ergeben sich bei dem Versuch also mehr als 23 Sechsen, so kann man auf dem Signifikanzniveau 5% (mit einer Sicherheit von mindestens 95%) sagen, dass der Würfel gefälscht ist. Andere Versuchsergebnisse bezeichnet man als nicht signifikant (auf dem Niveau von 5%) und es ist keine Schlussfolgerung möglich.
Dieser Test heißt **einseitig**, weil der **Ablehnungsbereich** {k+1, k+2, ... 100} nur auf einer Seite des Erwartungswertes von X liegt. Man wählte hier diesen Test deshalb, weil von vornherein vermutet wurde, dass die Sechs zu häufig auftrat. Hätte man nur vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs von 1/6 verschieden ist, so hätte man einen Ablehnungsbereich wählen müssen, der auf beiden Seiten des Erwartungswertes von X gelegen ist.

II. Zweiseitiger Test einer Hypothese

*Von einem Würfel wird vermutet, dass er die Sechs mit einer Wahrscheinlichkeit liefert, die nicht gleich 1/6 ist, wie es bei einem Laplace-Würfel zu erwarten wäre. Es soll ein **Test** entworfen werden, um die **Hypothese**, es handele sich um einen Laplace-Würfel, zu untersuchen.*

Es wird wieder geplant, den Würfel n=100 mal zu werfen und dabei die Zufallsvariable X=Anzahl der aufgetretenen Sechsen zu betrachten.

Sei H_0: "Es handelt sich um einen Laplace-Würfel." ($p(\{6\})=1/6$) die **Nullhypothese.**
Sei H_1: "Es handelt sich um **keinen** Laplace-Würfel." ($p(\{6\})\neq 1/6$) die **Gegenhypothese.**

Da hier, anders als im vorangegangen Beispiel, auch bedacht werden muss, dass der Würfel vielleicht zu selten eine Sechs produziert, muss der Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf beiden Seiten des Erwartungswertes für X eines Laplace-Würfels gelegen sein (**zweiseitiger**

Test). Das heißt, wenn entweder sehr wenige oder sehr viele Sechsen auftreten, werden wir die Nullhypothese verwerfen.

Der Ablehnungsbereich ist also von der Form: $\{0,1,\ldots k_l\} \cup \{k_r, k_r+1,\ldots 100\}$. Bei der Planung des Tests gibt man sich wieder eine obere Schranke a (z.B. a = 5%) für den Fehler 1. Art a' . Es soll also gelten:

$$5\% = \alpha \geq \alpha' = P_{H_0}(X \leq k_l \ \vee \ k_r \leq X) = F_{\frac{1}{6}}^{100}(k_l) + 1 - F_{\frac{1}{6}}^{100}(k_r - 1).$$

Es gibt nun viele Möglichkeiten, k_l und k_r so zu wählen, dass diese Bedingung erfüllt ist: Wenn die linke Teilmenge klein gehalten wird (k_l klein), dann kann man die rechte Teilmenge etwas größer wählen (k_r klein) oder umgekehrt. Man würde jedoch nur dann diese beiden Teilmengen unsymmetrisch wählen, wenn man a priori schon eine Vermutung über die Art der Fälschung des Würfels hat. Wenn man glaubt, dass der Würfel eher zu häufig als zu selten die Sechs liefert, dann sollte man die rechte Teilmenge des Ablehnungsbereiches größer und die linke kleiner wählen. Das bedeutet, dass die linke Teilmenge leer sein sollte, wenn man annimmt, es komme nur in Frage, dass der Würfel entweder echt sei oder er zu viele Sechsen produziere. Dann handelt es sich wieder um den vorher diskutierten einseitigen Test.

Ist a priori keine Information über die mögliche Art der Fälschung des Würfels vorhanden, so wählt man k_l und k_r symmetrisch.

Das heißt: Die Ungleichungen

$$2.5\% = \frac{\alpha}{2} \geq P_{H_0}(X \leq k_l) \quad \text{und} \quad 2.5\% = \frac{\alpha}{2} \geq P_{H_0}(k_r \leq X)$$

sollten erfüllt sein.

$$\Rightarrow \quad 0.025 \geq F_{\frac{1}{6}}^{100}(k_l) \quad \text{und} \quad 0.025 \geq 1 - F_{\frac{1}{6}}^{100}(k_r - 1)$$

$$\Rightarrow \quad 9 \geq k_l \quad \text{und} \quad k_r - 1 \geq 24$$

Der Ablehnungsbereich für die Nullhypothese lautet jetzt $\{0,1,..9\} \cup \{25, 26,.. 100\}$. Erhält man also bei 100 Würfen eine Anzahl von Sechsen, die in diese Menge fällt, so kann man bei einer Sicherheit von 95% behaupten, der Würfel sei gefälscht.

III. Konstruktion eines Tests

Welchen Einfluss hat die Wahl der Fehlerschranke α‘ bzw. der Zahl k (beim oben beschriebenen einseitigen Test) auf die Aussagekraft eines Testergebnisses? Dazu stelle man sich vor, daß viele, unbekannte Würfel daraufhin getestet werden, ob sie zu häufig die Sechs liefern.

Je größer nun k gewählt wird, desto kleiner ist der Fehler 1. Art; das heißt, dass man nur sehr selten einen echten Würfel irrtümlicherweise für einen gefälschten hält. Oder, positiv ausgedrückt: Fast jeder als gefälscht gehaltene Würfel ist tatsächlich gefälscht. Erkauft wird

diese relative Sicherheit des Urteils durch eine hohe Rate von Würfeln, die nicht als gefälscht erkannt werden, obwohl sie es sind (großer Fehler 2. Art).
Es gibt durchaus reale Situationen, in denen ein solches Testverhalten sinnvoll ist: Betrachtet man ein Gerichtsverfahren als einen Test (Nullhypothese: "Der Angeklagte ist unschuldig."), so ist es gerade wünschenswert, dass eine etwaige Verurteilung des Angeklagten (Die Nullhypothese wird abgelehnt.) nur dann erfolgt, wenn das Gericht sich seiner Sache sehr sicher ist (Der Fehler 1. Art sollte sehr klein sein.). Der Grundsatz "in dubio pro reo" drückt gerade aus, dass wir bereit sind, große Fehler 2. Art hinzunehmen.

Je kleiner k gewählt wird, desto größer wird der Fehler 1. Art, und der Fehler 2. Art wird kleiner. In einem solchen Fall zeigt der Test sehr häufig ein signifikantes Ergebnis: Viele Würfel werden, vielleicht auch irrtümlicherweise, als gefälscht erklärt. In den anderen Fällen aber, wenn der Test kein signifikantes Ergebnis zeigt, sind die Würfel echt oder nur schwach gefälscht ($p(\{6\}) = 1/6 + \varepsilon$).
Ein solches Testverhalten ist zum Beispiel bei einer Krebsvorsorgeuntersuchung (Nullhypothese: "Der Patient ist gesund.") erwünscht: Bei möglichst wenigen Menschen sollte die einfache Vorsorgeuntersuchung eine bereits vorhandene Erkrankung unerkannt lassen. Der hohe Fehler 1. Art (Relativ viele Menschen erhalten die zunächst beunruhigende Nachricht, erkrankt zu sein, obwohl sie es tatsächlich nicht sind.) ist in dieser Situation vertretbar, denn eine nachfolgende genauere Gewebeuntersuchung, die man aus Zeit- und Kostengründen nicht bei allen Testpersonen anwenden will, wird bald für Klarheit sorgen.

Die Fehlerschranke α kann also nicht mathematisch **berechnet** werden, sondern entscheidend für ihre **Wahl** ist die Absicht, die mit dem Test verbunden ist.

Abschließend soll die Konstruktion eines Tests anhand eines Beispiels erläutert werden.

In einem Spielkasino wird ein Spiel mit einem Würfel angeboten, das an zwanzig verschiedenen Tischen gleichzeitig gespielt wird. Nachdem einige Kunden der Polizei von spektakulären Spielverlusten berichtet haben, vermutet der Kommissar, dass einige der benutzten Würfel keine Laplacewürfel sind, sondern so gefälscht sind, dass sie

a) die Sechs nur mit einer Wahrscheinlichkeit erzeugen, die unter 1/6 liegt.
b) die Sechs mit einer Wahrscheinlichkeit erzeugen, die größer als 1/6 ist.
c) die Sechs mit einer Wahrscheinlichkeit erzeugen, die ungleich 1/6 ist.

Anstatt nun alle Angestellte des Spielkasinos zu verhaften und die Würfel zu beschlagnahmen, um die Personen zu verhören und die Würfel zu untersuchen auf mögliche Bleieinlagen, dieses Vorgehen erscheint angesichts bloßer Verdächtigungen als unangemessen, erwägt der Kommissar, einen Test durchzuführen. Dazu sollen seine Mitarbeiter die Ergebnisse von 50 Würfen eines jeden der zwanzig eingesetzten Würfel notieren, um in Abhängigkeit dieser Ergebnisse zu entscheiden, auf welchen Angestellten des Kasinos und auf welchen Würfel er seine Untersuchungen konzentrieren sollte. In den Fällen a) oder b) (Es liegt ein Vorwissen über die Art der möglichen Fälschung vor.) wählt also der Kommissar eine natürliche Zahl k mit $0 \leq k \leq 50$ und stellt dann die folgende Entscheidungsregel auf:

Für den Fall a) $\quad \mathbf{X \leq k \rightarrow H_0 \text{ wird abgelehnt}} \quad (= H_1$ wird akzeptiert.)

$$\mathbf{X > k \quad \rightarrow H_0 \text{ wird nicht abgelehnt.}}$$

H_0 ist wieder die Nullhypothese: "Es handelt sich um einen Laplace-Würfel." Nun muss der Kommissar entscheiden, welchen Wert er für k nehmen soll. Bei einem Laplace-Würfel wäre zu erwarten , dass etwa 8 Sechsen bei 50 Würfen erscheinen. Wenn er also für k den Wert 4 einsetzt, so wird es bei einem ungefälschten Würfel nur selten passieren, dass so wenige Sechsen erscheinen und er deshalb fälschlicherweise für einen gefälschten Würfel gehalten wird. Der Fehler erster Art α' ist also klein:

$$\alpha' = F_{\frac{1}{6}}^{50}(4) = 6.43\%$$

Selbst wenn also alle zwanzig eingesetzten Würfel echt sind, wird er nur etwa einen oder zwei davon (6.43% von 20) nach seinem Test für unecht halten. Die Gefahr sich in der Öffentlichkeit durch vorschnelle, letztlich ungerechtfertigte vorläufige Festnahmen zu diskreditieren ist bei dieser Wahl von k für den Kommissar also vertretbar klein. Der Preis für diese Sicherheit ist jedoch ein großer Fehler zweiter Art: Nehmen wir an, 10 der im Spielkasino eingesetzten Würfel seien so gefälscht, dass sie die Sechs nur mit einer Wahrscheinlichkeit 1/10 zeigen. Dann gilt

$$\beta' = 1 - F_{\frac{1}{10}}^{50}(4) = 56.88\%.$$

Der Kommissar muss damit rechnen, dass etwa 5 oder 6 (56.88% von 10) der tatsächlich gefälschten Würfel bei dieser Wahl 4 für k von seinem Test nicht entdeckt werden. Wären die Würfel nicht ganz so stark gefälscht (Wahrscheinlichkeit für eine Sechs = 1/8), dann sähe die Bilanz für den Kommissar noch schlechter aus: Dann entkämen 76.54% also etwa 7 oder 8 der angenommenen 10 gefälschten Würfel unerkannt.
Um den Wert von k festzulegen, muss der Kommissar also zuerst entscheiden, ob es ihm wichtiger ist, möglichst keinen Kasinoangestellten zu Unrecht zu verdächtigen, dann muss er für k einen kleinen Wert wählen; viele Gauner werden ihm jedoch entwischen. Oder möchte er möglichst viele Ganoven entlarven, dann wird er für k größere Werte einsetzen. Viele Unschuldige werden dann jedoch auch verdächtigt. Da der Fehler zweiter Art prinzipiell unkontrollierbar ist, **setzt** sich der Kommissar also eine obere Schranke von 15% für den Fehler erster Art **gemäß seiner Testabsichten** und bestimmt dann den dazu gehörigen größtmöglichen Wert für k:

$$15\% \geq \alpha' = F_{\frac{1}{6}}^{50}(k) \Rightarrow k = 5.$$

Im Fall b) $\mathbf{X \geq k \rightarrow H_0}$ **wird abgelehnt** (= H_1 wird akzeptiert.)

$\mathbf{X < k \rightarrow H_0}$ **wird nicht abgelehnt**

verläuft die Argumentation ähnlich zu der im Fall a). Zum Signifikanzniveau 15% findet der Kommissar den kleinstmöglichen Wert für k aus der Bedingung::

$$15\% \geq \alpha' = 1 - F_{\frac{1}{6}}^{50}(k-1) \quad \Rightarrow k = 12.$$

Hat der Kommissar im Fall c) kein Vorwissen über die Art, wie die Würfel gefälscht sind, dann wird er, weiterhin zu dem Signifikanzniveau 15%, einen symmetrischen Ablehnungsbereich für die Nullhypothese wählen:

$$7.5\% \geq \frac{\alpha'}{2} = F_{\frac{1}{6}}^{50}(k_1) \Rightarrow k_1 = 4, \quad \text{und}$$

$$7.5\% \geq \frac{\alpha'}{2} = 1 - F_{\frac{1}{6}}^{50}(k_r - 1) \Rightarrow k_r = 13.$$

Durch einen Vergleich mit dem Ergebnis im Fall a) bzw. im Fall b) erkennt man hier auch, dass die Ermittlungen um so erfolgreicher sind, je mehr zutreffendes Vorwissen über die Art der Fälschung (Wahrscheinlichkeit der Sechs ist erhöht oder erniedrigt) vorhanden ist.

Wir kommen nun auf die eingangs gestellten Alltagsfragen zurück:

Hatte der Kasinobesucher wirklich nur Pech, als er sein Geld verloren hat?
Immer wo der Zufall im Spiel ist, gibt es keine absolut sichere Antwort. Selbst wenn sein Mit- oder Gegenspieler nur Sechsen geworfen hätte, widerspräche das keinem Naturgesetz. Dennoch stehen wir dem Zufall nicht hilflos gegenüber: Wie wir gesehen haben, handelt es sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 98,81% um einen Falschspieler, wenn er bei 100 Würfen mindestens 25 Sechsen erhielt. Auch wenn ein Restzweifel besteht, so gebieten doch Vorsicht und Klugheit, auf weitere Spiele mit dieser Person zu verzichten.

Was ist von Coronatests zu halten, die keine sicheren Ergebnisse liefern?
Wie bei fast allen praktisch relevanten Tests sind hier die Fehler erster und zweiter Art nicht mathematisch sondern nur empirisch zu ermitteln. Sie können durch finanziellen oder zeitlichen Aufwand klein gehalten, aber wegen der grundsätzlich immer gegenwärtigen Messfehler nicht auf Null reduziert werden. Ist bei einem Test A der Fehler erster Art (Nullhypothese: Die Testperson ist gesund.) besonders klein und bei einem Test B ist es der Fehler zweiter Art, so hängt es vom Zweck des Tests ab, welcher der beiden zum Einsatz kommen sollte:
Steht der Schutz der noch nicht infizierten Gesamtbevölkerung im Vordergrund, etwa bei tödlich verlaufenden Infektionen, so muss Test B gewählt werden: Möglichst jeder Infizierte muss als solcher erkannt werden. Die Einschränkungen durch eine unnötig verordnete Quarantäne bei den vielleicht falschen Diagnosen müssen in Kauf genommen werden.
Ist es anders, und man möchte die Freiheitsrechte der Einzelpersonen möglichst nicht beschneiden, wenn kein zwingender Grund vorliegt, so entscheidet man sich für Test A. Es handelt sich also bei der Wahl eines Testverfahrens um eine politische Entscheidung, die in der Regel frühzeitig bei noch unsicherer Faktenlage getroffen werden muss. Verschwörungstheorien lassen sich mit fehlerbehafteten Testverfahren nicht begründen.